**\*\*Format and timing look good!\*\***

**La relation d’Euler Preuve - sous-titres**

1

00:00:28,000 --> 00:00:33,800

Maintenant que vous avez discuté un peu de

savoir comment cette relation est vraie,

2

00:00:33,900 --> 00:00:41,000

cette relation F-A+S=2,

je vous propose de la montrer.

3

00:00:42,000 --> 00:00:45,000

Cette relation s'appelle

la relation d'Euler,

4

00:00:45,500 --> 00:00:49,000

d'après le mathématicien Leonhard Euler ;

5

00:00:49,500 --> 00:00:52,900

et donc on va prouver cette formule par

récurrence.

6

00:00:53,000 --> 00:00:56,900

Au lieu de vous montrer en détail ce

qu'est le raisonnement par récurrence,

7

00:00:57,000 --> 00:01:01,500

je vous propose de montrer cette formule

avec des dessins

8

00:01:01,600 --> 00:01:05,000

et vous verrez le raisonnement par

récurrence un peu sortir.

9

00:01:08,000 --> 00:01:09,900

Dans le raisonnement par récurrence,

10

00:01:10,000 --> 00:01:14,900

il faut d'abord montrer que la propriété

qu'on souhaite démontrer

11

00:01:15,000 --> 00:01:26,000

(donc notre propriété va être que S-A+F=2

pour n'importe quel graphe planaire),

12

00:01:27,000 --> 00:01:30,000

est vraie dans le cas initial.

13

00:01:30,800 --> 00:01:33,900

Et dans notre cas, le cas initial est

le cas où il y a zéro arête.

14

00:01:34,000 --> 00:01:38,900

Le cas avec zéro arête correspond au

graphe où il n'y a que un sommet

15

00:01:39,000 --> 00:01:40,500

(ici vous avez un sommet).

16

00:01:40,600 --> 00:01:44,000

C'est un graphe complètement autorisé :

il est connecté,

17

00:01:44,100 --> 00:01:49,000

puisque pour aller de ce sommet à

ce sommet, il n'y a rien besoin de faire ;

18

00:01:49,100 --> 00:01:51,500

et vous voyez qu'il n'y a pas d'arêtes

qui se croisent,

19

00:01:51,600 --> 00:01:54,000

puisqu'il n'y a tout simplement

pas d'arête.

20

00:01:56,000 --> 00:02:03,000

On vérifie que pour ce graphe, il y a un

sommet (donc S=1), zéro arête (donc A=0),

21

00:02:03,100 --> 00:02:07,000

et une face, qui est la face extérieure

(donc F=1).

22

00:02:07,100 --> 00:02:14,900

Et si vous faites le calcul,

S-A+F = 1-0+1 = 2.

23

00:02:15,000 --> 00:02:18,000

Donc la relation d'Euler est vraie pour ce

cas-ci.

24

00:02:18,100 --> 00:02:22,000

Ceci est le cas initial, et c'est la fin

de l'initialisation de la récurrence.

25

00:02:23,000 --> 00:02:25,900

Passons maintenant à

l'étape de récurrence.

26

00:02:26,000 --> 00:02:28,900

Cela consiste à supposer que la propriété

qu'on souhaite montrer

27

00:02:29,000 --> 00:02:33,400

est vraie pour un certain A.

La propriété qu'on souhaite montrer

28

00:02:33,500 --> 00:02:38,100

est la relation d'Euler (S-A+F=2),

et supposons que

29

00:02:38,150 --> 00:02:42,900

cette relation d'Euler est vraie pour tous

les graphes qui ont moins de 12 arêtes,

30

00:02:43,000 --> 00:02:45,400

donc qui ont 12 arêtes ou moins.

Et maintenant,

31

00:02:45,450 --> 00:02:47,900

supposons qu'on a un graphe avec 13 arêtes.

32

00:02:48,000 --> 00:02:51,000

Ici, si vous comptez le nombre d'arêtes,

il y a 13 arêtes.

33

00:02:52,000 --> 00:02:55,900

Alors comment va-t-on montrer que ce graphe

satisfait la relation d'Euler ?

34

00:02:56,000 --> 00:03:01,000

Je vous propose tout simplement d'effacer

cette arête.

35

00:03:02,000 --> 00:03:07,000

Qu'est-ce qu'on obtient comme graphe ?

Le graphe qu'on obtient est celui-ci.

36

00:03:08,000 --> 00:03:12,000

Vous voyez qu'on obtient un nouveau graphe,

qui a maintenant 12 arêtes.

37

00:03:12,500 --> 00:03:25,000

Ici, A'=A-1.

Ici, on avait A=13, donc A'=12.

38

00:03:25,500 --> 00:03:29,000

Quel a été l'effet de l'effacement de cette

arête ?

39

00:03:30,500 --> 00:03:34,400

On voit bien que le nombre de sommets n'a

pas bougé : on n'a effacé aucun sommet,

40

00:03:34,500 --> 00:03:41,000

donc S' est tout simplement égal au nombre

de sommets initial, donc S'=S.

41

00:03:44,500 --> 00:03:49,000

Mais maintenant, vous voyez que le nombre

de faces a changé !

42

00:03:50,000 --> 00:03:55,000

Ici, vous voyez que l'arête initiale était

entre deux faces.

43

00:03:55,500 --> 00:04:02,000

Ici, il y avait une face d'un côté de

l'arête, et il y en avait une autre.

44

00:04:02,200 --> 00:04:05,000

Donc c'étaient deux faces distinctes.

45

00:04:05,100 --> 00:04:12,000

Or, ici, ces deux faces sont réunies et

n'en forment plus qu'une seule.

46

00:04:12,500 --> 00:04:17,400

Donc vous voyez qu'on a diminué le nombre

de faces de un.

47

00:04:17,500 --> 00:04:25,000

Donc F'= F - 1.

48

00:04:26,000 --> 00:04:33,400

Vous savez que, par hypothèse, vu que

A'=A-1 (c'est-à-dire 12 ici),

49

00:04:33,500 --> 00:04:40,000

vous avez montré la relation d'Euler pour

tous les graphes qui ont au plus 12 arêtes.

50

00:04:41,000 --> 00:04:47,000

Donc vous savez que ceci (S'-A'+F')

est égal à 2 par la relation d'Euler.

51

00:04:49,500 --> 00:04:51,900

Mais maintenant,

en utilisant ces relations,

52

00:04:52,000 --> 00:04:55,700

vous pouvez aussi exprimer S'-A'+F'

en fonction de S, A et F,

53

00:04:55,800 --> 00:04:59,000

qui sont les nombres de sommets, d'arêtes

et de faces du graphe initial.

54

00:05:00,000 --> 00:05:13,000

Vous voyez que S'-A'+F'=S-A+F (vous voyez

que les -1 se compensent entre eux).

55

00:05:15,000 --> 00:05:20,000

Et donc vous voyez que S-A+F=2 :

vous n'avez même pas eu besoin

56

00:05:20,050 --> 00:05:27,000

de calculer S-A+F en comptant,

mais il vous a suffit de savoir que

57

00:05:27,100 --> 00:05:32,000

c'était vrai pour ce graphe-ci pour déduire

que c'était vrai pour ce graphe-là.

58

00:05:36,000 --> 00:05:40,500

Là, on a fait une des possibilités :

on a effacé cette arête.

59

00:05:40,600 --> 00:05:44,900

Mais ce n'est pas la seule possibilité qui

puisse se produire, parce que par exemple,

60

00:05:45,000 --> 00:05:51,000

si vous effacez cette arête-ci plutôt,

que se passe-t-il si on l'efface ?

61

00:05:51,100 --> 00:05:54,000

Et bien on obtient ce graphe-ci,

62

00:05:54,500 --> 00:05:59,400

et vous voyez qu'on obtient un graphe

qui est déconnecté.

63

00:06:00,000 --> 00:06:04,000

C'est-à-dire que vous pouvez séparer

les deux parties,

64

00:06:04,100 --> 00:06:05,100

et vous pouvez dire que ici,

65

00:06:05,150 --> 00:06:12,900

vous avez un graphe avec

S1 sommets, A1 arêtes, et F1 faces ;

66

00:06:13,000 --> 00:06:19,000

et ici vous avez un autre graphe avec

S2 sommets, A2 arêtes, et F2 faces.

67

00:06:21,000 --> 00:06:22,900

Maintenant, ce que l'on veut,

68

00:06:23,000 --> 00:06:29,900

c'est exprimer S, A et F

en fonction de S1, S2, A1, A2, F1 et F2.

69

00:06:31,000 --> 00:06:38,900

Tout d'abord, S.

S est égal à quoi ?

70

00:06:39,000 --> 00:06:41,900

Je vous rappelle que S est le nombre de

sommets dans le graphe initial,

71

00:06:42,000 --> 00:06:44,900

avant qu'on ait effacé cette arête.

72

00:06:45,500 --> 00:06:50,000

Et bien vous voyez que S n'a pas bougé : on

n'a pas changé le nombre de sommets total.

73

00:06:51,500 --> 00:06:55,000

Ainsi, S est égal au nombre de sommets

dans ce graphe-ci, donc S1,

74

00:06:55,100 --> 00:06:58,500

plus le nombre de sommets

dans ce graphe-ci, donc S2.

75

00:06:59,000 --> 00:07:07,000

Donc S=S1+S2.

76

00:07:09,000 --> 00:07:11,000

Maintenant, pour le nombre d'arêtes.

77

00:07:12,000 --> 00:07:21,000

Vous savez que ces deux graphes-ci

ont été obtenus en effaçant une arête.

78

00:07:21,500 --> 00:07:28,900

Donc ça veut dire que A est égal à

ce nombre d'arêtes

79

00:07:29,000 --> 00:07:34,000

plus ce nombre d'arêtes plus 1,

puisqu'il y avait cette arête en plus.

80

00:07:34,100 --> 00:07:44,000

Donc c'est égal à A1+A2+1.

81

00:07:46,000 --> 00:07:52,000

Et enfin, F, le nombre de faces.

82

00:07:53,500 --> 00:07:58,000

On n'a pas changé le nombre de faces

à l'intérieur dans ce graphe-ci,

83

00:07:58,100 --> 00:08:03,000

ni dans ce graphe-là.

84

00:08:04,000 --> 00:08:08,900

En revanche vous voyez que maintenant ici

on a une face extérieure,

85

00:08:09,000 --> 00:08:13,000

et ici on en a une autre !

86

00:08:13,500 --> 00:08:17,900

Cela veut dire que, si vous comptez F1+F2,

87

00:08:18,000 --> 00:08:22,000

ça va être le nombre de faces

du graphe initial +1,

88

00:08:22,100 --> 00:08:25,000

puisqu'on compte la face extérieure

deux fois maintenant.

89

00:08:26,500 --> 00:08:32,500

F=F1+F2-1.

90

00:08:34,000 --> 00:08:39,500

Très bien, maintenant, calculons S-A+F.

91

00:08:40,000 --> 00:08:59,500

S-A+F= S1-A1+F1 + S2-A2+F2 -1-1.

92

00:09:29,500 --> 00:09:34,000

Ces deux-là, ça va faire -2.

93

00:09:36,000 --> 00:09:38,000

Maintenant, on sait que la relation d'Euler

94

00:09:38,100 --> 00:09:44,500

a été prouvée pour des graphes

avec un plus petit nombre d'arêtes que A.

95

00:09:44,600 --> 00:09:49,000

Donc pour ce graphe-ci par exemple,

avec un nombre d'arêtes A1,

96

00:09:49,100 --> 00:09:58,000

on sait que la relation d'Euler est vraie,

donc on sait que ceci (S1-A1+F1) vaut 2.

97

00:09:58,100 --> 00:10:01,500

De même, ici pour ce graphe,

on sait que la relation d'Euler est vraie,

98

00:10:01,600 --> 00:10:06,000

donc on sait que ceci (S2-A2+F2) vaut 2.

99

00:10:06,100 --> 00:10:17,000

Donc à la fin, on a que

S-A+F = 2+2-2 = 2.

100

00:10:17,100 --> 00:10:19,000

Et voilà !

101

00:10:19,500 --> 00:10:22,000

Voilà ! Merci d'avoir suivi cette vidéo !

102

00:10:22,500 --> 00:10:26,900

On a pu prouver la relation d'Euler

aujourd'hui pour les graphes planaires.

103

00:10:27,000 --> 00:10:32,000

Sachez que des formules similaires existent

aussi pour des graphes non planaires

104

00:10:32,100 --> 00:10:36,900

(ce sont des graphes où l'on peut

autoriser des croisements).

105

00:10:37,000 --> 00:10:40,000

Cette relation d'Euler est vraiment

universelle

106

00:10:40,100 --> 00:10:43,000

et c'est pour ça que je la trouve

très belle.

107

00:10:43,100 --> 00:10:46,000

Les chercheurs et les chercheuses

qui font de la combinatoire

108

00:10:46,100 --> 00:10:52,000

l'utilisent très souvent pour

classer les graphes qu'iels étudient.

109

00:10:53,000 --> 00:10:58,000

Merci beaucoup d'avoir suivi cette vidéo,

et à bientôt !